LAURBERG & GAD FOT. 1918 FOTOTYPI PACHT & CRONES EFTF.

C. Juel.

# C. Juel.

25. Januar 1855—24. Januar 1935.

Tale holdt i Videnskabernes Selskabs Møde den 12. April 1935.

Af **Johannes Hjelmslev.**

Christian Sophus Juel var født d. 25. Januar 1855 i Randers. Efter at have taget alm. Forberedelseseksamen begyndte han i 1871 at studere paa den polytekniske Læreanstalt; men det varede ikke længe, før Matematikken optog hans Interesse saaledes, at han besluttede sig til at gaa over til et rent videnskabeligt Studium. I 1876 blev han Student, og efter faa Aars Universitetsstudium, hvorved han kom ind paa sin højt beundrede Lærer H. G. Zeuthens fremragende første Elevhold, der foruden ham bestod af C. Crone, J. P. Gram og H. Valentiner, tog han i 1879 Magisterkonferens i Matematik.

Allerede i sit 19. Aar, som Studerende paa Læreanstalten, leverede han et selvstændigt Arbejde »Om Fodpunktskurver«, der blev optaget i »Tidsskrift for Mathematik«. Af dette Tidsskrift blev han senere en stadig Medarbejder, og i 1890 overtog han Redaktionen af Tidsskriftets mere videnskabelige Afdeling, et Hverv han beholdt gennem en lang Aarrække, og hvorved han har gjort en betydelig Indsats, ikke mindst ved mange fortræffelige vejledende Anmeldelser af matematisk Litteratur, som Gang paa Gang gav os Lejlighed til at beundre hans overordentlig omfattende og mangesidige matematiske Viden.

To Aar efter sin Magisterkonferens vandt Juel Universitetets Guldmedalje for et Arbejde omhandlende Indhyllingsflader for Planer, der skærer 2 Flader af 2. Orden i harmonisk beliggende Keglesnit. Opgaven var stillet i analytisk Form. Men Juel løste den ved rent geometriske Hjælpemidler. Da Bedømmelsen i lige Grad karakteriserer baade Afhandlingens Forfatter og Bedømmelsens Affatter, H. G. Zeuthen, kan det have en vis historisk Interesse her at citere følgende Linier:

»Den stillede Opgave peger vel nærmest hen paa en analytisk Undersøgelse; men der er intet i dens Ordlyd, som udelukker en synthetisk Behandling, for hvilken den er gjort til Gjenstand i den foreliggende Afhandling, efter at Forfatteren først i Indledningen har vist, at han véd, hvorledes den kunde underkastes en smuk algebraisk Behandling. Valget af den synthetiske Vej har vist sig at passe godt for Forfatteren, idet den Frihed, som Opgaven giver i Henseende til Valget af Undersøgelsesemner inden for det opgivne Omraade, har givet ham Lejlighed til at lægge den for en Synthetiker vigtige Evne for Dagen til at stille sig selv Spørgsmaal og at tage selvstændigt Initiativ til Undersøgelser samt bemærke, hvad der ligger i de vundne Resultater og hvortil de kunne bruges. De ofte vanskelige Undersøgelser gennemføres tillige paalidelig og fuldstændig, saa man overalt føler sig tryg overfor de vundne Resultater, om man end beklager, at Forfatteren ikke altid har anvendt den samme Omhu paa at undgaa Fejl i Udregning af saadanne Koefficienter, hvis Værdier øjensynlig ingen Betydning havde for den foreliggende Undersøgelse.«

Der har altsaa allerede her vist sig Tegn til, at Juel i mere end een Henseende hørte til de Matematikere, som slutter sig til Hesse's bevingede Ord: »die Mathematik ist die Wissenschaft das Rechnen zu vermeiden«, hvilket ogsaa har efterladt Spor i adskillige Anekdoter om Juels Distraktion ved Undervisningen med Hensyn til Tal, samtidig med at han stærkt understregede over for Eleverne, hvor megen Vægt han vilde tillægge en rigtig gennemført Talregning ved Eksamen.

Juel disputerede for Doktorgraden i 1885. Emnet for Disputatsen var: »Bidrag til den imaginære Linies og den imaginære Plans Geometri«. Atter her og nu i særlig fremtrædende Grad viste hans Forkærlighed for synthetisk-geometriske Metoder sig. Straks i Indledningen giver han Udtryk herfor:

»De store Fremskridt, den analytiske Geometri har gjort i dette Aarhundrede, bero for en ikke ringe Del derpaa, at den ved en konsekvent Benyttelse af imaginære Tal er i Stand til at udsige en Mængde Sætninger, særlig saadanne, der angaa Antallet af Skæringspunkter mellem algebraiske Kurver, i Almindelighed, d. v. s. uafhængig af de indgaaende geometriske Dannelsers indbyrdes Beliggenhed. Det maatte derfor allerede tidlig vise sig som en Nødvendighed for de nyere rent geometriske Methoder, forsaavidt disse vilde hævde sig en selvstændig Stilling, ud fra deres eget Grundlag at give en Teori for de saakaldte imaginære Elementers Optræden i Geometrien. En saadan blev i fyldestgørende Form leveret af v. Staudt i »Beiträge zur Geometrie der Lage« 1856—60, der udkom som Fortsættelse af samme Forfatters Geometrie der Lage 1847.«

Der er her en klar Tilkendegivelse af de Opgaver, som den Gang optog Juels Hovedinteresse, og disse Opgaver fulgte ham et langt Liv igennem. Det var ikke særlig hans Maal at lette og simplificere Overgangen fra den v. Staudtske Fremstilling til den analytiske Geometri, saaledes at denne derefter kunde træde i Anvendelse, men derimod at fastholde en helt igennem geometrisk Tankegang med umiddelbar Tilknytning til reelle Figurer som Arbejdsgenstand og Arbejdsinstrument. Af selve den v. Staudt'ske Lære, med Definitioner og Arbejdsgrundlag til Fremstilling af de imaginære Elementer ved reelle Figurer gav Juel i Disputatsen en væsentlig simplificeret Fremstilling. Og derefter fulgte omfattende og mangeartede Bidrag til udvidet Kendskab vedrørende geometriske Dannelser inden for det imaginære Omraade.

Ethvert imaginært Punkt bæres af en reel ret Linie og bestemmes nærmere ved en vis Korrespondance (en Involution) mellem Punkterne paa denne Linie, og enhver imaginær Plan bæres ligeledes af en ret Linie og bestemmes nærmere ved en vis Korrespondance (en Involution) mellem Planerne gennem denne Linie. En Samling af imaginære Punkter (eller Planer) maa da fremstilles ved en Samling af rette Linier. Punkterne paa den almindelige imaginære rette Linie maa f. Eks. fremstilles ved en Samling af rette Linier, der betegnes som en lineær Kongruens, d. v. s. et Liniesystem i Rummet, der sender een enkelt Linie gennem hvert af Rummets Punkter. Det v. Staudt'ske Grundlag gaar nu ud paa at studere disse Figurer af Linier i Rummet og arbejde med dem som de egentlige Elementer, der gøres til Genstand for Undersøgelse, og paa den Maade at sætte reelle Figurer i Stedet for imaginære.

Korrespondancen, der oprettes mellem Punkterne paa to imaginære Linier bliver saaledes erstattet med tilsvarende Korrespondancer mellem Linierne i to lineære Kongruenser. Og her havde Juel særlig sin Opmærksomhed henvendt paa, at der var 2 elementære Korrespondancer mellem Linierne i de to Kongruenser, der i lige Grad havde Krav paa Interesse, nemlig Kollineationer og Reciprociteter i Rummet.

Dette førte Juel til Opdagelsen af de saakaldte Symmetraliteter paa den imaginære rette Linie, som sideordnet med de v. Staudt'ske Projektiviteter, og i Fortsættelse heraf til lignende nye Transformationer i den imaginære Plan.

En morsom Anvendelse af Symmetraliteterne i Planen førte til en Fremstilling af de Hamiltonske Kvaternioner, hvorved Juel fik Lejlighed til at vise sin Forbindelse med en Læremester af en helt anden Støbning, nemlig Professor Thiele, som sikkert ved sine originale Tanker om Matematikens Grundlag i det hele har øvet en ikke ringe Indflydelse paa Juel.

Sidste Afsnit af Disputatsen handlede om Fordelingen af de reelle og imaginære Punkter inden for en algebraisk Kurve. Og her var atter den v. Staudt'ske Fremstilling ved Kurvens Bærerkongruens den ledende, saaledes at Studiet af Kurven henførtes til Studiet af den reelle Liniekongruens, der bar den, og dette atter til Studiet af den reelle Singularitetsflade for denne Kongruens. De simple og anskuelige Betragtningsmaader, som her lejlighedsvis bringes i Anvendelse, danner aabenbart Indledningen til de Metoder, Juel senere benyttede i saa stor Udstrækning til sine almindelige Undersøgelser over reelle Kurver og Flader. Saaledes fandt han her et meget anskueligt Bevis for den af F. Klein ad helt anden Vej fundne Sætning, at Differensen mellem Antallene af reelle Punkter og reelle Tangenter for en i en reel Plan liggende imaginær Kurve er lig Differensen mellem Kurvens Orden og Klasse.

Forskellige Former for Riemann'ske Flader af lignende Art, som Klein senere har bragt i Anvendelse til Fremstilling af algebraiske Kurver, havde Juel allerede været inde paa her.

Ogsaa vigtige Sætninger eller nye Beviser for Sætninger om Kurver af 3. Orden, saaledes Undersøgelser over kvadratiske Transformationer, der fører en Kurve af 3. Orden over i sig selv, findes i sidste Afsnit af Disputatsen.

Juels Disputats var jo som alle vore Disputatser den Gang skrevet paa Dansk og blev først 4 Aar efter Udgivelsen anmeldt for et internationalt Publikum i »Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik«. Til Gengæld fik den her en meget udførlig og forstaaende Anmeldelse af den kendte italienske Matematiker G. Loria, der bl. a. udmærkede sig ved at kunne læse dansk, og som altid har fulgt dansk matematisk Litteratur med stor Interesse. Aaret efter fik Juel en Gengivelse af Disputatsens Hovedindhold optaget paa Tysk i Acta mathematica. Samtidig var der nu imidlertid kommet et stort anlagt Arbejde i Gang af den italienske Matematiker C. Segre, som behandlede lignende Emner, og Emner der førte langt videre. Men Juel vil stedse bevare Prioriteten som den, der først har paavist Symmetraliteternes Eksistens og systematiske Betydning for den projektive Geometri.

Juel var ved disse Arbejder fra mangesidige Synspunkter trængt dybt ind i de algebraiske Kurvers Teori. Et talende Vidnesbyrd herom er bl. a. hans senere Arbejde i Math. Annalen 47. Bd.: »Über die Parameterbestimmung von Punkten auf Curven zweiter und dritter Ordnung. Eine geometrische Einleitung in die Theorie der logarithmischen und elliptischen Functionen«. Af andre senere Arbejder vedrørende almindelige algebraiske Kurver skal nævnes hans gentagne Undersøgelser over de Klein'ske Relationer mellem Kurvernes reelle Singulariteter. Juel havde sat et stort Arbejde ind paa ud fra de v. Staudt'ske Teorier at naa frem til en afsluttet geometrisk Teori for algebraiske Kurver, en Tanke, der ogsaa senere med større og mindre Mellemrum optog ham, og som ogsaa var fremme i hans sidste Aar.

Dette naaede han ikke. Men der er ingen Tvivl om, at netop disse Arbejder satte rige Frugter paa anden Maade, idet de i høj Grad har bidraget til at give Juels systematiske Viden den store Dybde og det mangesidige Udblik, vi alle beundrede, og som aldrig undlod at give sig Udtryk i rammende og originale Bemærkninger i Samtaler om matematiske Emner af vidt forskellig Art.

I de sidste trange Aar, hvor Juel havde den tunge Skæbne at miste Synet, lykkedes det ham til Trods for dette, med Assistance af sin utrættelige og dygtige Medarbejder Dr. David Fog, at faa udgivet en større Monografi over projektiv Geometri. I dette sidste Arbejde fra Juels Haand genfinder vi alle Disputatsens Ungdomsklange. Nutiden vil heri finde en fortræffelig Vejledning i v. Staudts Lære, en Lære, der vel nærmest i vore Dage betragtes som et Stykke Historie, men i hvert Fald et Stykke Historie, der bliver levende gennem Juels Fremstilling, og derved endnu kan have Muligheder for at befrugte anskuelig-geometrisk Tænkning.

Juel er maaske den eneste herhjemme og en af de overmaade faa i hele den matematiske Verden, der virkelig har gennemarbejdet v. Staudts hele Værk. Han beherskede disse Teorier til Fuldkommenhed, og han beundrede dem. Han fremhævede ofte det, som var særlig karakteristisk for v. Staudts Betragtninger, deres i egentlig Forstand reelle og finite Karakter. Jeg husker f. Eks., hvorledes Juel, længe før de nyere Synspunkter vedrørende Kontinuitetsspørgsmaal var kommet rigtig i Fart, omtalte v. Staudts karakteristiske Stilling overfor saadanne Spørgsmaal. Ingen Grænseovergang blev nogensinde benyttet. Alle Særtilfælde, som mange vilde behandle summarisk ved en Grænseovergang, blev omhyggelig behandlet enkeltvis. Ogsaa den berømte Lakune i v. Staudts Bevis for Projektivgeometriens Fundamentalsætning forklarede Juel ud fra v. Staudts Særstandpunkt paa dette Omraade.

Juels Hovedinteresse, at forme de matematiske Begreber i geometriske Billeder, og at anvende disse Billeder som Arbejdsinstrument til systematiske Undersøgelser, var det, som han ofte gav Udtryk ved at tale om Geometri i græsk Aand. Det var den Geometri, han elskede, og ikke den, der saa let fortaber sig i analytiske Formalismer. Det var denne Hovedinteresse, som prægede hans Ungdomsarbejde. Og det var den samme, som prægede hans Manddomsværk, det som vi nu skal omtale, Grundlæggelsen af Læren om Kurver og Flader af endelig Orden.

Det første større Arbejde, han udgav herom, udkom 1899 i Selskabets Skrifter under Titelen: »Indledning i Læren om de grafiske Kurver«. Grafiske Kurver, faar man at vide, er Kurver, der tegnes. Kurverne bestaar af et endeligt Antal elementære Buer, og om elementære Buer siges intet andet, end at den simpelt hen er en Del af en konveks Polygon med tilstrækkelig mange tilstrækkelig smaa Sider. Dette er med andre Ord en Kurvelære, der gaar ud paa umiddelbar Virkelighedsbeskrivelse. Juel lagde selv megen Vægt paa denne Indstilling — til at begynde med. Men det var ikke mange, der kunde dele den med ham. I dette første Arbejde gjorde Juel, ved Hjælpemidler han selv havde skabt, hvoriblandt det saakaldte grafiske Korrespondanceprincip, udførlig Rede for Udseendet af plane Kurver af 3. og 4. Orden, d. v. s. de Kurver, der højst har 3 resp. 4 isoleret liggende Punkter fælles med en ret Linie.

Men Virkelighedsindstillingen blev nu trængt tilbage. Den overalt fremtrængende mængdeteoretiske Analyse løb saa at sige alle den Slags Ting over Ende, og allerede i det Arbejde, der blev det næste i Rækken, røbede Titelen:

»Om ikke-analytiske Kurver«, at nu var der andre Strenge paa Buen. I denne Afhandling, der udvidede de tidligere Undersøgelser til lignende fundamentale Undersøgelser over Rumkurver, var der tillige lagt Vægt paa Gennemførelse af Beviser for den saakaldte ikke-analytiske Eksistens af de opstillede Former, hvilket skete gennem specielle Eksempler dannet ved Konstruktion af passende reelle Funktioner. Ved disse Eksistensbeviser havde Juel fundet adskillig Støtte hos J. L. W. V. Jensen.

Endnu en interessant Fortsættelse af Kurveundersøgelserne fulgte i 1911: De simple cykliske Kurver, defineret ved, at Maksimaltallet af isoleret liggende Skæringspunkter med en Cirkel var 4. Formerne for disse Kurver og de dermed sammenhængende Spørgsmaal om Evoluter m. m. blev udførlig diskuteret.

Til Slut kom en samlet reviderende Fremstilling i det store Arbejde fra 1914: »Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung«, der ligeledes fremkom i Selskabets Skrifter, hvor den centrale Indstilling er den, at der tilstræbes en rent mængdeteoretisk Kontinuitetsbeskrivelse, medens den oprindelige Virkelighedsindstilling synes at være kastet fuldstændig over Bord.

At Juel imidlertid senere vendte tilbage til sit Virkelighedsgrundlag som det fundamentale, fik jeg gentagne Beviser paa ved Samtaler i hans sidste Leveaar. Han regnede vedblivende sit første Arbejde som det bedste. Og der var da ogsaa en Friskhed og Oprindelighed over dette Arbejde, som ikke paa nogen Maade opvejes ved den skærpede Analyse, der kendetegner det reviderede Arbejde.

Juels Undersøgelser var helt igennem originale. Kun faa Forarbejder er der at nævne: Newtons Undersøgelser over algebraiske Kurver af 3. Orden, de faa almindelige Betragtninger af Möbius og v. Staudt, en enkelt nyere Afhandling af A. Kneser og endelig Zeuthens Undersøgelse over Udseendet af algebraiske Kurver af 4. Orden. Sidstnævnte Undersøgelse fremhæver Juel selv som et af sine væsentligste Forbilleder, det, hvorfra alle hans Forsøg stammer. Men her var der jo Tale om algebraiske Kurver. Og Juels Kurvebegreb var langt almindeligere. Kurven af n'te Orden er den, om hvilken for plane Kurvers Vedkommende intet andet vides end dette, at den er sammensat af et endeligt Antal Elementarbuer, og at den højst har n isoleret liggende Punkter fælles med en vilkaarlig ret Linie, og for Rumkurvers Vedkommende, at Kurven paa analog Maade er sammensat af et endeligt Antal Elementarbuer i Rummet (Buer af 3. Orden) og skæres af enhver Plan i højst n isoleret liggende Punkter. Og Juel har ved sine Undersøgelser indledet en almindelig Teori for disse Kurver, en Teori, der nu er i en betydelig Vækst, idet adskillige Geometrere rundt om i Verden er beskæftiget med at føre den videre.

Men Juels berømteste Resultat er Sætningen om Flader af 3. Orden, den som udsiger, at en i det projektive Rum lukket Flade af 3. Orden (d. e. en saadan Flade, som højst har 3 isoleret liggende Punkter fælles med en hvilken som helst ret Linie) nødvendigvis maa indeholde rette Linier, enten 3 eller 7 eller 15 eller 27 rette Linier (hvis ikke Fladen helt var overdækket med rette Linier), et Resultat som hidtil kun var kendt for algebraiske Flader, men som Juel nu viste var uafhængigt af, om Fladen var algebraisk eller ikke. Denne Sætning virkede saa overraskende, at mange Fagfolk ikke vilde tro, den var rigtig. Juel indsendte i 1911 en kort Note om Sætningen til den berømte franske Matematiker Darboux med Anmodning om Optagelse i det franske Akademis Comptes rendus. Darboux svarede høfligt tilbage, at han gerne vilde optage den, men at der var visse Ting, som foruroligede ham. Og Spørgsmaalet affødte en hel Korrespondance mellem Darboux, Zeuthen og Juel, hvori Darboux gennem Forelæggelse af bestemte Eksempler paa Flader (bl. a. Fladen $x^2 + y^2 = z^3 + z^5 + 1$) søgte at bevise, at Sætningen ikke var rigtig. Det lykkedes imidlertid at gendrive alle disse Forsøg paa Modbeviser, og der er ingen nu, der tvivler paa Sætningens Rigtighed. Tværtimod har man begrundede Formodninger om, at den gælder med endnu større Rækkevidde, end det her var antaget.

Den Undren, man følte ved Sætningen om Fladen af 3. Orden, var ogsaa i nogen Grad til Stede ved de tidligere Resultater af Juels Undersøgelser. Man undrede sig over, at det var muligt at udtale saa almindelige Sætninger paa Grundlag af saa faa Forudsætninger. En saadan Undren vil altid opstaa, hver Gang der foreligger noget fundamentalt nyt. Juel selv var betaget af sine Resultater. Han udtalte ofte, at han haabede, at det Kurvebegreb, han arbejdede med, skulde trænge igennem som det egentlige, det fornuftige Kurvebegreb, og mange Ting tyder paa, at det vil gaa saaledes.

Et andet Haab, som Juel lejlighedsvis har udtalt, var det, at han ved at paalægge Kurverne og Fladerne flere Betingelser af lignende Art, som dem han var begyndt med, skulde kunne naa til en geometrisk Karakterisering af de almindelige algebraiske Kurver (og Flader), noget han mente at have fundet en vis Bekræftelse paa ved sit Kongresforedrag i København 1911, har ogsaa visse Muligheder for at gaa i Opfyldelse, om end næppe direkte i den Form, han her havde tænkt sig.

Juel var en dyb og original matematisk Tænker. Selv i sine mindste Lærebøger (og han udgav mange) var der ofte en og anden Ting i Forordet, som nok kunde se lidt mærkelig ud, men som dog ingen tillagde nogen egentlig Betydning; men kom man til at tale med ham derom, kunde det hænde, at han udbrød: Ja, men dermed mener jeg i Virkeligheden noget ganske bestemt! Og han mente noget ganske bestemt, og naar man fik at vide, hvad det var, var man en original Tanke rigere.

Juels væsentligste Lærervirksomhed var knyttet til den polytekniske Læreanstalt, hvor han gjorde en stor Indsats, først som Lærer ved Kursus til Adgangseksamen og som Lærer for Fabrikingeniørerne, senere som Professor i Rational Mekanik, en Undervisning han har grundlagt. Det var ham en dyb Skuffelse, at han ikke blev Professor ved Universitetet i det Fag, han elskede. Og det tør siges, at det var et Tab for dansk Matematik, at han ikke blev det. De rige Evner og Kundskaber, han sad inde med, vilde sikkert have udfoldet sig langt stærkere og sat langt rigere Frugter, om han havde staaet i Spidsen for en selvstændig akademisk Lærervirksomhed. Men en rig Arv har han efterladt os i sit videnskabelige Livsværk.

Her i Selskabet deltog han med stor Interesse i Møderne. Endogsaa i de senere Aar, da han var saa godt som blind, mødte han dog til Stadighed. I de allersidste trange Aar, hvor han havde den haarde Skæbne ikke blot helt at miste Synet, men paa Grund af legemlig Svaghed Aar og Dag maatte sidde lænket til sin Stol, en Skæbne han bar med en sjælden Styrke, endnu da hørte han med Interesse om videnskabelige Emner og om, hvad der foregik herinde.

Nu har vi kun Mindet tilbage. Han var i sit Fag vidtspændende, alsidig, og hjemme som faa paa mange af Videnskabens Omraader.

Vi mindes ham som en af dem, der har kastet Glans over dansk Videnskab.